数理解析研究所講究録
573巻 1985年 111-190

Partially elliptic system に対する マイクロ境界値問題 と その応用

東大・理　戸瀬信之 (*)

(Nobuyuki Tose)

(*) 現在の所属は 愛媛大学・理学部

目次.

第1章 Introduction

この小論では, Partial De Rham system, Partial Cauchy Riemann system などを含む, Partial elliptic system と呼ばれる micro-differential equation に対する境界値問題を扱う。

更に, その応用として 2-micro 函数の層 $\mathcal{C}^2_\Lambda$ が, 正則パラメーター付き micro 函数の層 $\mathcal{C}\mathcal{O}$ から余次元1の microlocalization をして得られる層と同型であることを示す。その応用として, 正則パラメーター付の 2-micro 函数の正則パラメーターに関する接続の一意性を示す。更に, 2-microlocal なすいか割りの定理を示す。

この仕事は Schapira [10] に刺激されて得た。この場を借りて, Schapira 先生に海のかなたへ感謝します。

この仕事をまとめるにあたり, 終始御助言を頂きました, 小松彦三郎先生, 大阿久俊則先生に感謝します。

第2章 Partially elliptic system に対する境界値問題

柏原−河合 両先生は [2] に於て, ellipticな微分方程式系に対する境界値問題を研究し, 更に様々な応用を見出した。この章においては, 柏原−河合の上記の理論を, cotangent bundle の正則包合的な部分多様体に沿って microlocalize する。

§2.1. 設定.

(1) $M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t$

と定め, その複素化として

(2) $X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0}_z \times \mathbb{C}^{n_1}_w$

を定める。

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} z \longleftrightarrow \zeta \\ w \longleftrightarrow \theta = \sigma + \sqrt{-1}\,\tau \end{array}\right\}$$

と X の dual variable を定めて,

(4) $\Lambda^{\mathbb{C}} = \{(z, w, \zeta dz + \theta dw) ; \zeta = 0\}$

なる $\mathring{T}^*X$ の regular involutive な部分多様体を定める。その real locus を

$$(5)\quad \Lambda := \Lambda^{\mathbb{C}} \cap \mathring{T}^*_M X$$

$$= \{(x, t ; \sqrt{-1}(\xi dx + \tau dt)) \in \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*M ; \xi = 0\}$$

とする。$\tilde{\Lambda}$ を Λ の部分複素化，即ち $\Lambda \hookrightarrow \Lambda^{\mathbb{C}}$ と見て，$\Lambda^{\mathbb{C}}$ の bicharacteristic で Λ を通るものの union とする。今の場合は，

(6) $\tilde{\Lambda} = \mathbb{C}^{n_0}_{z} \times \sqrt{-1}\,\mathring{T}^{*}\mathbb{R}^{n_1}_{(t,\sqrt{-1}\tau dt)}$.

となる。

[定義 2.1] $\mathcal{M}$: system of microdifferential equation で Λ のある点の近傍で定まるものとする。このとき，

(7) $\mathcal{M}$ が partially-elliptic along Λ

$\Leftrightarrow\ ch^{2}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}(\mathcal{M}) \cap \mathring{T}^{*}_{\Lambda}\tilde{\Lambda} = \phi$ ▨

[注意 2.2] Bony - Schapira [1] は上の条件を満たす single microdifferential equation に対して microlocal singularity の伝播を調べた。▨

更に，いくつかの Notation を定める。

(8) $N = \{(x,t) \in M ; x_1 = 0\}$

その X 中の複素化として

(9) $Y = \{(z,w) \in X ; z_1 = 0\}$

(10) $$\Sigma = \Lambda \underset{M}{\times} N = \{(x, t; \sqrt{-1}\tau dt); x_1 = 0\}$$

ここで $x = (x_1, x')$, $z = (z_1, z')$ と定める。更に、$T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の座標として bicanonical な $(x, t; \sqrt{-1}\tau dt; \sqrt{-1}x^* dx)$ をとり、同様に $\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}}$ を Yve Laurent [6] に従って定めて、$T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}}$ の bicannonical な座標を

$(z, w; \theta dw; z^* dz)$ ととる。

ここで

(11) $$S^*_\Sigma \tilde{\Lambda} = \{(x', t; \sqrt{-1}\tau dt; (z_1^* dz_1 + \sqrt{-1}x'^* dx')\infty)\}$$

と定め $S^*_\Sigma \tilde{\Lambda}$ の部分集合 $G_\pm$ を

(12) $$G_\pm = \{\pm \mathrm{Re}\, z_1^* > 0\}$$

とするとき、$S^*_\Sigma \tilde{\Lambda}$ は

(13) $$S^*_\Sigma \tilde{\Lambda} = G_+ \sqcup G_- \sqcup (S^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \underset{\Lambda}{\times} \Sigma)$$

と disjoint に分けることが出来る。

単に次の二つの命題に注意する。

(26) $$\Lambda_\pm := \{(x, t, \xi, \tau dt) \in \Lambda;\ \pm x_1 > 0\}$$

と定める。この時

[命題 2.6]

(27) $$\Gamma_{\overline{\Lambda_\pm}}(\mathcal{B}^2_\Lambda) \longrightarrow \pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}(\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})\Big|_{G_\pm}$$

なる canonical な射が存在する。

(証明) [S K k] chapter 1 prop. 1.2.4. に

より証明される ▨

[命題 2.7]

(28) $$\begin{tikzcd} & \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_\Sigma \arrow[dl] & \\ \Gamma_\Sigma(\mathcal{B}^2_\Lambda) = \mathcal{H}^{n_0}_\Sigma(\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) \arrow[rr] & & R\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}(\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})[1] \arrow[ul, "+1"'] \end{tikzcd}$$

なる canonical な三角形が存在する。

(証明) [S.K.k] chapter 1 prop 1.2.5.

により直ちに証明される。

§2.3. Partially elliptic system に対する性質

この二つの命題を用いて, $\Lambda_\pm$ に台を持つ $\mathcal{M}$ の $\mathcal{B}^2_\Lambda$ 解と $G_\pm$ における $\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ 解との関係を調べるのが次の命題である。

[命題 2.8]

(29) $$R\Gamma_{\overline{\Lambda_\pm}} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_\Lambda) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, R\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}(\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}|_{G_\pm}))$$

(証明) $\mathcal{B}^2_\Lambda$ は flabby であるから,

(30) $$0 \to \Gamma_\Sigma(\mathcal{B}^2_\Lambda) \to \Gamma_{\overline{\Lambda_+}}(\mathcal{B}^2_\Lambda) \oplus \Gamma_{\overline{\Lambda_-}}(\mathcal{B}^2_\Lambda) \to \mathcal{B}^2_\Lambda \to 0$$

なる完全系列を得る。これより, 次の cannonical な三角形を得る。

(31)
$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}\Gamma_{\Sigma}\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_{\Lambda}) \arrow[dl] & \\
\bigoplus_{\pm} \mathbb{R}\Gamma_{\Lambda_\pm}\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}; \mathcal{B}^2_{\Lambda}) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_{\Lambda}) \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

一方 命題2.7 より 次の 三角形 を得る。

(32)
$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \Gamma_{\Sigma}(\mathcal{B}^2_{\Lambda})) \arrow[dl] & \\
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}; \mathbb{R}\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda} *}\, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}|\Sigma}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

よって $\mathcal{M}$ は今, partially elliptic along Λ

故に

(33) $\check{\mathcal{M}} := \mathcal{E}^2_{\Lambda^c} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}} \pi^{-1}\mathcal{M}|_{\Lambda^c}$

と定める時，（但し $\pi : \mathring{T}^*_{\Lambda^c}\tilde{\Lambda}^c \xrightarrow{\pi} \Lambda^c$ ）

(34) $\mathbb{R}\mathcal{H}om(\check{\mathcal{M}}, \mathcal{C}^2_\Lambda) = 0$

が分る。これと，

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_\Lambda \longrightarrow \mathcal{B}^2_\Lambda \longrightarrow \pi_*\mathcal{C}^2_\Lambda \longrightarrow 0$$

なる 2-micro 函数に関する基本的な完全系列を用いると，

(35) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_\Lambda) \xleftarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_\Lambda)$

が成立する。

更に $\mathcal{M}$ の Λ に沿った partially ellipticity より

(36) $\mathrm{supp}\ \check{\mathcal{M}} \cap \mathring{T}^*_\Lambda \tilde{\Lambda} = \phi$

から，

$$(37)\quad \mathbb{R}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M},\ \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})$$

$$\simeq \bigoplus_{\pm} \mathbb{R}\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}\ \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M},\ \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}\big|_{G\pm})$$

と直和に分れる。.

結局，二つの規範的な三角形と二つの同型(37)
及び(35)より(29)を得る。 $\blacksquare$

$$\Sigma = \Lambda \underset{N}{\times} M = \{(x,t;\sqrt{-1}\tau dt)\in\Lambda;\ x_1=0\}$$

を $\sqrt{-1}\,\mathring{T}^*N$ の正則包合的多様体と見做す。
また，$\tilde{\Sigma}$ を Σ の $\mathring{T}^*Y$ における部分複素化
と見做す。この同一視のもと，

$$(38)\quad \rho:\ S^*_{\Sigma}\tilde{\Lambda} \setminus S^*_{\tilde{\Sigma}}\tilde{\Lambda} \longrightarrow S^*_{\Sigma}\tilde{\Sigma}$$

$$(x',t;\sqrt{-1}\tau dt;\ z_1^* dz_1+\sqrt{-1}x'^* dx') \longrightarrow (x',t;\sqrt{-1}\tau dt;\ \sqrt{-1}\ x'^* dx')$$

なる自然な射影を定める。

$\mathcal{M}$ の Λ に沿った micro-ellipticity により

(39) $\mathrm{supp}(\check{\mathcal{M}}) \cap S_{\Lambda}^{*}\tilde{\Lambda} \underset{\Lambda}{\times} \Sigma = \phi$

が成立する。よって

(40) $\mathcal{N}_{\pm} := \rho_{*}\left(\mathcal{E}^{2}_{\Sigma^{\mathbb{C}} \to \Lambda^{\mathbb{C}}} \underset{\mathcal{E}^{2}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}{\otimes} \check{\mathcal{M}}\Big|_{G_{\pm}}\right)$

なる $\mathcal{E}^{2}_{\Sigma^{\mathbb{C}}}$ module を定める時,

$$\imath : Y \hookrightarrow X$$

なる埋め込みを定めると.

(41) $\imath^{*}\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}_{+} \oplus \mathcal{N}_{-}$

が成立する。

Y. Laurent の Thesis [6] によると次の duality theorem が成立することに注意する。

(42)

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^{2}_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\imath^{*}\mathcal{M}, \mathcal{E}^{2}_{\Sigma^{\mathbb{C}}})$$

$$\simeq \rho_{*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^{2}_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\omega^{-1}\mathcal{M}; \mathcal{E}^{2}_{\Sigma^{\mathbb{C}} \leftarrow \Lambda^{\mathbb{C}}}). \text{ [1]}$$

$$\text{但し}\quad \mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}} \underset{\Lambda^{\mathbb{C}}}{\times} \Sigma^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\tilde{\varpi}} \mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}}, \qquad \mathring{T}^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}} \underset{\Lambda^{\mathbb{C}}}{\times} \Sigma^{\mathbb{C}} \xrightarrow{\rho} \mathring{T}^*_{\Sigma^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Sigma^{\mathbb{C}}}$$

と ϖ とする。次の natural morphism の存在に注意する。

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}\leftarrow\Sigma^{\mathbb{C}}}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}\leftarrow\Sigma^{\mathbb{C}}}, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})$$

(43) $\mathcal{E}nd_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}\leftarrow\Sigma^{\mathbb{C}}})$

$$\longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})$$

(42), (43) 及び次の isomorphism

(44) $$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}\leftarrow\Sigma^{\mathbb{C}}}, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}) \simeq \mathcal{C}^2_{\Sigma}$$

に注意する時、次の canonical な morphism の存在に到達する。

(45) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\iota^* \mathcal{M}, \mathcal{C}^2_{\Sigma})$

$\longrightarrow \rho_* \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})[1]$

この写像を通して、

$$\mathbb{R}\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}\left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\check{\mathcal{M}}; \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}\big|_{G_\pm})\right)$$

$$\left(\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}(\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}\big|_{G_\pm}))\right)$$

と

$$\mathbb{R}\pi_{\Sigma*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{N}_\pm, \mathcal{C}^2_{\Sigma})[1]$$

とが同型であることを言うことが、命題2.8に続くstepの目標となる。

この同型を言う為には、(45)の射をΣに落として証明すればよい。即ち、

$$\mathbb{R}\pi_{\Sigma*}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\iota^*\mathcal{M}; \mathcal{C}^2_{\Sigma}).$$

と

$$R\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}\, R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})[1]$$

とが同型であることを言えばよい。

更に換言すると，

$$(46)\quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}; \mathcal{B}^2_{\Sigma}/\mathcal{O}^2_{\Sigma}) \xrightarrow{\ \sim\ } R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, R\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})[1]$$

を証明することになる。再び命題2.7.を用いて

$$\begin{tikzcd}
 & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, R\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})[1] \arrow[dl, "(47)"'] & \\
R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\Sigma}) \arrow[rr] & & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \Gamma_{\Sigma}(\mathcal{B}^2_{\Lambda})) \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

なる三角形を得る。

次に $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}$ solution に対する Cauchy-Kowalevsky の定理を引用する。

[定理 2.9]（柏原−Schapira[12], Schapira[19]）

$\mathcal{M}$ を coherent $\mathcal{E}_X$-module で $\Lambda^{\mathbb{C}}$ の点の近傍で def されているものとする。このとき、
$Y \underset{X}{\times} \mathring{T}^*X$ は $\mathcal{M}$ に関し $\Lambda^{\mathbb{C}}$ に沿って non-microcharacteristic とする。このとき、

(48) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})\big|_{\tilde{\Sigma}} \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}})$$

(49) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}; \mathcal{C}_{\Lambda})\big|_{\tilde{\Sigma}} \simeq R\Gamma_{\tilde{\Sigma}}\, R\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})[2]$$

が成立する。 ▨

状況を定理2.9.から設定に戻す。$\mathcal{M}$ は Λ に沿って partially elliptic 故に、$Y \times \mathring{T}^*X$ は Λ^{c} に沿って non-microcharacteristic である。
定理2.9.を用いる時、同型(48)及び(49)が成立するので

(50). $\mathbb{R}\Gamma_{\tilde{\Sigma}}\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})\ [+2]$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}})$$

が得られる。この (50) に対して $\mathbb{R}\Gamma_{\Sigma} \circ [n_0-1]$ を作用

$$\mathbb{R}\Gamma_{\tilde{\Sigma}} = \mathbb{R}\Gamma_{\Sigma} \circ \mathbb{R}\Gamma_{\Lambda}$$

に注意すると，

(51) $\mathbb{R}\Gamma_{\Sigma}\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\Lambda}(\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}))\ [n_0+1]$

$$\simeq \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_Y}(\mathcal{M}, \mathbb{R}\Gamma_{\Sigma}(\mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}))$$

により，次の小松－河合－Schapira の定理

の超局所版を得る。

[命題 2.10]

$\mathcal{M}$：Λ に沿って partially-elliptic な system of microdifferential equation を考える。

このとき，次の isomorphism が成立する。

(52) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M};\ \Gamma_{\Sigma}(\mathcal{B}^2_{\Lambda}))[1]$$

$$\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_{\Sigma}) \qquad \blacksquare$$

更に定理 2.9 を用いると，

(53) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}|_{\Sigma})$$

$$\xleftarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M};\ \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\Sigma})$$

が成立する。他方

(54)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_{\Sigma}/\mathcal{A}^2_{\Sigma}) \arrow[dl, "+1"'] & \\
R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}, \mathcal{A}^2_{\Sigma}) \arrow[rr] & & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}, \mathcal{B}^2_{\Sigma}) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

なる trivial な三角形が成立することが分る。

まとめると、三角形 (47) 即ち.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, R\Gamma_{\Sigma|\tilde{\Lambda}*}\, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}) \arrow[dl] & \\
R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\Sigma}) \arrow[rr] & & R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \Gamma_{\Sigma}(\mathcal{B}^2_{\Lambda})) \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

及び今得た三角形 (54) と二つの同型.

(52) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \Gamma_{\Sigma}(\mathcal{B}^2_{\Lambda}))[1]$$

$$\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}; \mathcal{B}^2_{\Sigma}).$$

及び R

(53) $$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(i^*\mathcal{M}; \mathcal{C}_{\tilde{\Sigma}}|_{\Sigma})$$

$$\xleftarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}|_{\Sigma})$$

により、求めていた同型

$$(54)\quad \mathbb{R}\pi_{\Sigma|\tilde{\Lambda} *}\left(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M};\, \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}\Big|_{G_\pm})\right)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\pi_{\Sigma *}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{N}_\pm,\, \mathcal{C}^2_{\Sigma})[1]$$

が得られる。この同型(54)と命題2.8.の同型(29)を併せ用いると次の定理2.11.が得られる。これは，柏原―河合[2]における楕円型境界値問題の超局所化と言える。

[定理2.11] (partially elliptic boundary value problem)

$$(55)\quad \mathbb{R}\Gamma_{\overline{\Lambda_\pm}}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M},\, \mathcal{B}^2_{\Lambda})$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\pi_{\Sigma *}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{N}_\pm,\, \mathcal{C}^2_{\Sigma})[-1]$$

第3章　応用

この章では，前章で展開した境界値問題の理論を用いて，2-micro函数の層 $\mathcal{C}^2_\Lambda$ が Laurent [6] で定義された bi-canonical transformation を通じて正則パラメーター付きのmicro函数の層 $\mathcal{C}\mathcal{O}$ を係数とする1次元相対cohomology群と同型であることを示す。証明自体は，柏原-河合 [2] の analogy にすぎないが，結果自体は将来，偏微分方程式系の特異性の伝播に対して有用な方途となりうるかもしれない。

§3.1. Lewy-溝畑系に関する結果.

$$X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0}_z \times \mathbb{C}^{n_1}_w$$

$$M = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t$$

$$\Lambda = \{(x, t, \sqrt{-1}(\xi dx + \tau dt)) \in \mathring{T}^*_M X ;\ \xi = 0\}$$

なる設定のもと次の方程式を考える。

$$(3.1)\quad \mathcal{M}_p : \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}x_j\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)u = 0 & (j = 1, \cdots, p) \\ \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - \sqrt{-1}x_j\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)u = 0 & (j = p+1, \cdots, d) \end{cases}$$

[Lemma 3.1]

$$P(x,D) = \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\alpha x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Q(x,D) = \frac{\partial}{\partial x_1} - 2\beta x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$(\alpha, \beta \in \mathbb{C}^+ = \{ z \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}\, z > 0 \}$

ω は $(x, t, \sqrt{-1}\tau dt, \sqrt{-1} x^* dx) = (0,0; \sqrt{-1} dx_1, \sqrt{-1}(0,1,0\cdots 0))$.
の近傍とする。この時 K なる 2-micro-local operator があり,

(3.2) $$0 \longrightarrow \mathcal{C}^2_\Lambda \xrightarrow{Q} \mathcal{C}^2_\Lambda \xrightarrow{K} \mathcal{C}^2_\Lambda \xrightarrow{P} \mathcal{C}^2_\Lambda \longrightarrow 0.$$

が完全系列をなす。

更に, $N = \{ (x,t) \in M ; \ x_1 = 0 \}$ とし.

$\Sigma = \{ (x', t ; \sqrt{-1}(\xi' dx' + \tau dt)) ; \ \xi' = 0 \}$ とし.
$\in \sqrt{-1} T^* N$.

$T^*_\Sigma \tilde{\Sigma}$ を $\{ (x, t ; \sqrt{-1}\tau dt, \sqrt{-1} x^* dx) ; \ x_1 = 0, \ x_1^* = 0 \}$
と同一視する。この時 ω において 2-micro-local operator 達 Φ, Ψ を

(3.3)
$$\Phi : \mathcal{C}^2_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}^2_\Lambda.$$
$$\Psi : \mathcal{C}^2_\Lambda \longrightarrow \mathcal{C}^2_\Sigma. \quad とし$$

(3.4) $\Psi \Phi = id$, $\Phi \Psi = K$ が成立するように見付けることが出来る。

(証明)

次の micro-micro local operator 達を考える。

$$E = \frac{1}{4\pi^2} \prod_{j=3}^{n_0} \delta(x_j - x_j') \prod_{i=1}^{n_1} \delta(t_i - t_i') \times$$

$$\int \frac{ds}{(s - \alpha(x_1 - x_1'))(x_2 - x_2' + 2\gamma^{-2}(\alpha x_1 + \beta x_1')s + \alpha\beta\gamma^{-2}(x_1 - x_1')^2 - \gamma^{-2}s^2 + \sqrt{-1}\,0)}$$

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \prod_{j=3}^{n_0} \delta(x_j - x_j') \times \prod_{j=1}^{n_1} \delta(t_i - t_i') \times$$

$$\int \frac{ds}{(s + \beta(x_1 - x_1'))(x_2 - x_2' + 2\gamma^{-2}(\alpha x_1 + \beta x_1')s + \alpha\beta\gamma^{-2}(x_1 - x_1')^2 - \gamma^{-2}s^2 + \sqrt{-1}\,0)}$$

$$K = -\frac{\gamma}{4\pi\sqrt{-1}} \prod_{j=3}^{n_0} \delta(x_i - x_j') \prod_{i=1}^{n_1} \delta(t_i - t_i') \times \frac{1}{(x_2 - x_2' + \alpha x_1^2 + \beta x_1'^2 + \sqrt{-1}\,0)^{\frac{3}{2}}}$$

これらは

$$\Omega = \{ (x, t, \sqrt{-1}\,\tau dt, \sqrt{-1}\,x^* dx) \;;\; x_2^* > 0 \}$$

で定義された Σ-micro-local operators である。

[S.K.K] 第1章 example 3.2.5. の計算と同様に

$PE = 1 \qquad EP = 1 - K.$

$FQ = 1 \qquad QF = 1 - K.$ が成立することが分る。

以上により

$$0 \to \mathcal{C}^2_\Lambda \xrightarrow{Q} \mathcal{C}^2_\Lambda \xrightarrow{K} \mathcal{C}^2_\Lambda \xrightarrow{P} \mathcal{C}^2_\Lambda \to 0.$$

は完全系列をなすことが分る。

$$\Sigma := \{(x, t, \sqrt{-1}\tau dt, \sqrt{-1}x^* dx);\ x_1 = 0,\ x_1^* = 0,\ x_2^* > 0\}.$$

$$\Sigma \underset{\Lambda}{\times} T^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \longrightarrow T^*_\Sigma \tilde{\Sigma}$$

なる projection により、Σ を $\mathring{T}^*_\Sigma \tilde{\Sigma}$ $(x_2^* > 0)$ と identify する。

$$\Phi : \mathcal{C}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}_\Lambda \quad \Psi : \mathcal{C}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}_\Lambda.$$

を次のように定義する。

$$\Phi : u(x_2, \cdots, x_n) \longmapsto u(x_2 + \alpha x_1^2, x_3, \cdots, x_n, t)$$

$$= \int -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{u(x_2', x_3, \cdots, x_n, t)}{x_2 + \alpha x_1^2 - x_2'} dx_2'$$

$$\Psi : v(x_1, \cdots, x_n) \longmapsto Kv|_{x_1=0}.$$

この時

$$1 = \Psi\Phi : \mathcal{C}_\Sigma \longrightarrow \mathcal{C}_\Sigma.$$

$$K = \Phi\Psi : \mathcal{C}_\Lambda \longrightarrow \mathcal{C}_\Lambda$$

が成立する。 $\square$

[注意3.2]

$$
(3.5)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_\Lambda & \xrightarrow{P} & \mathcal{C}_\Lambda & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle K} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_\Lambda & \xrightarrow[P]{} & \mathcal{C}_\Lambda & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

$$
(3.6)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_\Lambda & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}_\Lambda & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle K} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_\Lambda & \xrightarrow[Q]{} & \mathcal{C}_\Lambda & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

前 Lemma の relation により、上の chain map は、identity map と homotopic となることが分る。上の complex の cohomology 群は夫々 0次、-1次 cohomology 群のみ残る。消え残った cohomology 群は $\mathcal{C}^2_\Sigma$ と同型であることが分った。

[定理3.3] $\mathcal{M}$ をこの節の冒頭の Lewy-溝畑系とする。ω を $(x, t, \sqrt{-1}\tau dt, \sqrt{-1}x^* dx) = (0, 0; \sqrt{-1}dt_1, \sqrt{-1}(0\cdots 01))$ の近傍とする。この時 ω上

$$
(3.7)\qquad \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^2_\Lambda) = 0 \quad (\text{for } j \neq p)
$$

が成立する。

更に消え残った p 次 cohomology 群 $\mathcal{E}xt^p_{\mathcal{E}^2_{\Lambda^c}}(\mathcal{M}, \mathcal{C}^2_\Lambda)$

は，$N = \{ (x,t) \in M ; x_1 = \cdots = x_d \}$

$$\Sigma = \{ \sqrt{-1}\, T^*N \ni \cdot \; ; \xi_{d+1} = \cdots = \xi_{n_0} = 0 \}$$

とする時 $\mathcal{C}^2_\Sigma$ と同型であることが分る。

——————<∘>——————————<∘>——

この定理の証明は [S-K-K] 第3章 定理2.3.6 のそれを繰り返すこととなるので，これを省略する。

§3.2. de Rham system に関する準備.

この §3.2. においては 次の situation のもとに議論する。

$$(3.9)\begin{cases} X = \mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n_0}_z \times \mathbb{C}^{n_1}_w \\ \Lambda = \{ (z, w ; \zeta dz + \theta dw) ; \zeta = 0 \} \subset \mathring{T}^* X. \end{cases}$$

$T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の座標を $(z, w ; \theta dw ; z^* dz)$ととり

$\mathring{T}^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の点 $\mathring{p} = (0 ; dw_1 ; dz_n)$ の近傍で 次の

2-microdifferential equation を考える。

(3.10)

$$\mathcal{M} \begin{cases} \{D_{z_1} + Q_1(z,w;D_z,D_w)\}u=0 \\ \vdots \\ \{D_{z_d}+Q_d(z,w,D_z,D_w)\}u=0 \end{cases}$$

，但し，$Q_\ell(z,w,D_z,D_w)$ に対して次の条件をおく。

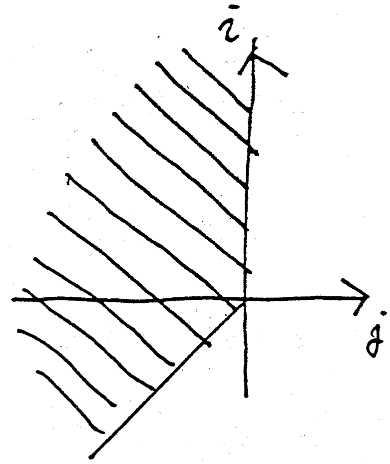
(3.11).

$$Q_\ell \in \mathcal{E}_\Lambda^{2(\infty,1)}[0,0] \quad (\ell=1,\cdots,d)$$

即ち．$Q^\ell = \sum Q_{ij}^{(\ell)}$ と bi-homogeneous に表す時

$$\{(j,i)\,;\,Q_{ij}\not\equiv 0\}$$

は左図に入る。更に，symbol ideal は simple と仮定する。



この時我々は次の命題を得る。

[命題3.4] $\mathring{p}$ の近傍で

(3.12) $\mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_\Lambda^2 / \mathcal{E}_\Lambda^2 D_{z_1} + \cdots + \mathcal{E}_\Lambda^2 D_{z_d}$

なる同型を得る。

(証明)　第2修士論文[11]の第2章において、我々は次の主張を得ている。即ち、

$R_1 \in \mathcal{E}_{\Lambda}^{2(\infty,1)}[0,0]$ が存在して、

$$(3.13)\quad \begin{cases} R_1(D_{z_1}+Q_1)R_1^{-1} = D_{z_1}. \\ R_1 \text{ は invertible in } \mathcal{E}_{\Lambda}^{2(\infty,1)} \end{cases}$$

が成立する。従って induction により

$$(3.14)\quad \mathcal{E}_{\Lambda}^2 \big/ \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_1} + \cdots + \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_k} + \sum_{\ell=k+1}^{d} \mathcal{E}_{\Lambda}^2 (D_{z_\ell} + Q_\ell)$$

$$\simeq \mathcal{M}$$

の仮定のもと、

$$(3.15)\quad \mathcal{M} \simeq \mathcal{E}_{\Lambda}^2 \big/ \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_1} + \cdots + \mathcal{E}_{\Lambda}^2 D_{z_{k+1}} + \sum_{\ell=k+2}^{d} \mathcal{E}_{\Lambda}^2 (D_{z_\ell} + Q_\ell)$$

を証明すればよい。

(3.14) の左辺における generator を u とする。

(3.16) $P_\ell = D_{z_\ell} + Q_\ell \quad (\ell = k+1, \cdots, d)$

と定める。

(3.17) $D_{z_\ell} u = 0 \quad (\ell = 1, \cdots, k)$

より，我々は．

(3.18) $Q_\ell = Q_\ell(z, w, D_{z_{k+1}} \cdots D_{z_{n_0}}, D_w)$

と仮定してよい。Weierstraßの定理により，初めから

(3.19) $P_{k+1} = D_{z_{k+1}} + Q_{k+1}(z, w, D_{z_{k+2}}, \cdots, D_{z_{n_0}}, D_w)$

と仮定してもよい。

(3.20) $(D_{k+1} + Q_{k+1}) u = 0$

なる関係式より

(3.21) $Q_\ell = Q_\ell(z, w; D_{z_{k+2}}, \cdots, D_{z_{n_0}}, D_w)$

と仮定してよい。以下同じ手続きを繰り返して，

(3.22)

$$\begin{cases} D_{z_\ell} u = 0 & (\ell = 1, \cdots, k) \\ P_\ell = \{D_{z_\ell} + Q_\ell(z, w; D_{z_{d+1}} \cdots D_{n_0}, D_w)\} u = 0 & \\ & (\ell = k+1, \cdots, d) \end{cases}$$

と仮定してもよいことが分る。

$\ell=1,\cdots,k$ に対して

$$[D_{z_j}, \mathcal{L}_{k+1}]u = 0$$

となるが，実は $[D_{z_\ell}, Q_{k+1}] = 0$ が分るのは，symbol ideal が simple という仮定より分る。（[S.K.K] 第2章 prop. 5.1.2. 参照）

更に，$R^{(k+1)}(w, z_{k+1},\cdots,z_{n_0}; D_{z_{d+1}}\cdots D_{z_{n_0}}, D_w)$ で invertible なものが存在して

$$(3.23)\quad R^{(k+1)^{-1}}(D_{z_{k+1}}+Q_{k+1})R^{(k+1)} = D_{z_{k+1}}.$$

更に

$$(3.24)\quad R^{(k+1)^{-1}} D_{z_\ell} R^{(k+1)} = D_{z_\ell} \quad (\ell=1,\cdots,k)$$

が成立するので (3.15) が証明されるので命題の証明を終える。 ▨

§3.3. $\mathscr{C}^2_\Lambda$ の同型定理について

この節では以下の状況のもとに議論する。

$$(3.25)\quad M = \mathbb{C}^{n_0}_z \times \mathbb{R}^{n_1}_t \simeq \mathbb{R}^{2n_0}_{(x,y)} \times \mathbb{R}^{n_1}_t$$

$$(3.26)\quad X = M \text{ の複素化} \simeq \mathbb{C}^{n_0}_z \times \mathbb{C}^{n_0}_{\bar{z}} \times \mathbb{C}^{n_1}_w$$

$$(3.27)\quad \Lambda = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, t;\ \sqrt{-1}(\xi dx + \eta dy + \tau dt)) \in \sqrt{-1}\,\mathring{T}^* M; \\ \xi = \eta = 0 \end{array} \right\}$$

$\left(\simeq \mathbb{C}^{n_0}_{z} \times \sqrt{-1}\,\mathring{T}^* \mathbb{R}^{n_1}_{(t, \sqrt{-1}\tau dt)} \right.$ と同一視する。$\left.\right)$

$f(z, \bar{z})$ を $\mathbb{C}^{n_0} \simeq \mathbb{R}^{2n_0}$ 上の実数値 実解析的函数として，$\{f(z, \bar{z}) = 0\}$ が $\mathbb{C}^{n_0}_{z}$ 上 非特異な，実解析的超曲面を定めると仮定する。

$$(3.28)\quad N = \{ (z, t) \in M;\ f(z, \bar{z}) = 0 \}$$

として

(3.29) Y : N の X 中における複素化

とする。また

$$(3.30)\quad \Sigma := \Lambda \underset{M}{\times} N$$

(これを $\sqrt{-1}T^*N$ の regular involutive submanifold と見做す。)

$$(3.31)\quad \Lambda_{\pm} := \{ (z, t;\ \sqrt{-1}\tau dt) \in \Lambda;\ \pm f(z, \bar{z}) > 0 \}$$

と定める。

$$(3.32)\quad \mathcal{M} = \mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \Big/ \sum_{j=1}^{n_0} \mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\, \partial_{\bar{z}_j}$$

なる Λ に沿った partially elliptic system に対して，第2章の結果を適用する。

(3.33) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M};\mathcal{B}^2_{\Lambda}) \simeq \mathcal{C}\mathcal{O}$

は容易に分る。但し、ここで $\mathcal{C}\mathcal{O}$ を Λ 上の sheaf で
zを正則パラメーターとして持つ micro函数として見做す。

(3.34) $\pi_{\Sigma} : \mathring{T}^*_{\Sigma}\tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$

を cannonical projection とする。

$G_{\pm}$ を第2章で定めたものとする。

(3.35) $\rho : S^*_{\Sigma}\tilde{\Lambda} \setminus S^*_{\tilde{\Sigma}}\tilde{\Lambda} \longrightarrow S^*_{\Sigma}\tilde{\Sigma}$

を projection として

(3.36) $\mathcal{N}_{\pm} = \rho_*\Big(\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}} \to \Lambda^{\mathbb{C}}} \underset{\mathcal{E}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}{\otimes} \mathcal{M}\Big|_{G_{\pm}}\Big)$

と第2章の如く定める時、

(3.37)

$$R\Gamma_{\overline{\Lambda_{\pm}}}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{M};\mathcal{B}^2_{\Lambda})\Big|_{\Sigma} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\pi_{\Sigma *}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{N}_{\pm}, \mathcal{C}^2_{\Sigma})[-1]$$

が定まる。(3.33) と (3.37) より

(3.38) $\mathbb{R}\Gamma_{\overline{\Lambda_{\pm}}}(\mathcal{C}\mathcal{O})\Big|_{\Sigma} \simeq \mathbb{R}\pi_{\Sigma *}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}}}}(\mathcal{N}_{\pm}, \mathcal{C}^2_{\Sigma})[-1]$

柏原-河合[3],[4]と同様に,

(3.39) $\alpha : S^*_\Sigma \tilde{\Lambda} \setminus S^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \longrightarrow S^*_\Sigma \Lambda$

とcannonical morphismと定め,

(3.40) $\Sigma = \mathrm{supp}\left(\mathcal{E}^2_{\Sigma^c \to \Lambda^c} \underset{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}{\otimes} \mathcal{M} \Big|_{S^*_\Sigma \tilde{\Lambda}} \right)$

とするとき,

$$\rho : Z \longrightarrow S^*_\Sigma \tilde{\Sigma}$$

はclosed embeddingであり

$$\alpha : Z \longrightarrow S^*_\Sigma \Lambda$$

はisomorphismであることが分る。($\mathcal{M}$ のrelationとして D_w, w によらないので[ ]及び[ ]の計算がそのまま成立するのである。

(3.41) $\Sigma_\pm = \left\{ (z; t; \sqrt{-1}\,\tau dt; z^* dz\infty) ; \begin{array}{l} (z,t) \in N \\ z^* = \pm \mathrm{grad}_z f(z,\bar{z}) \end{array} \right\}$

と定める時.

(3.42) $S^*_\Sigma \Lambda = \Sigma_+ \sqcup \Sigma_-$

と直和に分かれ,

すると $\rho_{\Sigma}^{*}\Lambda$ と $\mathrm{supp}(\mathcal{M}_{\Sigma^{\mathbb{C}}}) \cap \sqrt{-1}\rho_{\Sigma}^{1*}\tilde{\Sigma}$

とは identify 出来る。すると，(3.38) より.

(3.39)

$$\mathcal{H}^{k}_{\Lambda_{\pm}}(\mathcal{C}\mathcal{O})\Big|_{\Sigma} \simeq \mathcal{E}xt^{k-1}(\mathcal{N}_{\pm};\mathcal{C}^{2}_{\Sigma})\Big|_{\Sigma_{\pm}}.$$

なる同型を得る。

$$p^{*} := (0;\sqrt{-1}\,dt_{n_1};\ k\,d_z f) \in \Sigma_{\pm}$$

と定めるとき，[S-K-K] 第3章定理 2.3.2. を用いる。

$\{z\in\mathbb{C}^{n_0};\ f(z,\bar{z})=0\}$ の Levi 形式が非退化で signature が (p,n_0-1-p) と仮定する。

$(0,k\,d_z f)$ の近傍で定義された analytic function $f_j(z,z^{*})$ があり $(j=1,\cdots,n_0-1)$ で z^{*} について $\frac{1}{2}$ 次斉次かつ次の relation を満たす。

(3.40) $\{f_j,\bar{f}_j\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = 2\sqrt{-1}\quad (j=1,\cdots,p)$

(3.41) $\{f_j,\bar{f}_j\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = -2\sqrt{-1}\quad (j=p+1,\cdots,d).$

(3.42) $\{f_j,f_k\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = \{f_j,\bar{f}_k\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = 0\quad (j\neq k).$

があり)

$$(3.43)\quad \mathrm{supp}\left(\mathfrak{M}_{\Sigma^{\mathbb{C}}}\right) = \left\{(z,\bar{z};w;z^*,\bar{z}^*;\theta) \in \mathring{T}^*_{\Sigma^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Sigma^{\mathbb{C}}} ;\ f_j = 0 \quad (j=1,\cdots,n_0-1)\right\}$$

と書ける。

更に、

$$(3.44)\quad \mathrm{Re}\, f_j = g_j \ ,\qquad \mathrm{Im}\, f_j = h_j \qquad (j=1,\cdots,n_0-1)$$

と定める。更に θ, w とによらない g_j, h_j ($j=n_0,\cdots,2n_0-2$) で実数値のもので $\frac{1}{2}$ 次斉次なもの及び G で実数値で real valued なものをとり次の relation を満たすとする。

$$(3.45)\quad \begin{cases} \text{(i)} & \{g_j, h_j\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = -1 \quad j=1,\cdots,p,\ n_0,\cdots,2n_0-2 \\ \text{(ii)} & \{g_j, h_j\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = 1 \quad j=p+1,\cdots,n_0-1 \\ \text{(iii)} & \{g_j, h_k\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = 0 \quad (\text{for } j\neq k) \\ \text{(iv)} & \{g_j, g_k\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = \{h_j, h_k\}_{\Sigma^{\mathbb{C}}} = 0 \quad (\forall j,k) \\ \text{(v)} & \{g_j, G\} = \{h_j, G\} = 0 \quad (j=1,\cdots,2n_0-2) \end{cases}$$

ここで、

$$
(3.46)\left\{
\begin{array}{ll}
z_j' = g_j\, G^{-1} & \\
z_j^{*\prime} = h_j\, G & (j = 1, \cdots, p, n_0, \cdots, 2n_0-2) \\
z_j'^{*} = -h_j\, G & (j = p+1, \cdots, n_0-1) \\
z'^{*}_{2n_0-1} = G^2 &
\end{array}
\right.
$$

と定める時, 更に z'_{2n_0-1} を定めて

$$
(3.47)\quad T^*\{(z, \bar{z});\ f(z, \bar{z}) = 0\} \longrightarrow \begin{array}{c} T^*\mathbb{C}^{2n_0-1} \\ \cup \\ (z', z'^{*}dz') \end{array}
$$

が canonical transform ([illegible]) となるように出来る。

更に,

$$
(3.48)\left\{
\begin{array}{l}
Y' = \mathbb{C}^{2n_0-1}_{z' = (z'_1, \cdots, z'_{2n_0-1})} \times \mathbb{C}^{n_1}_{w'} \\
N' = \mathbb{R}^{2n_0-1}_{x'} \times \mathbb{R}^{n_1}_{t'} \\
\Sigma' = \{(x', t';\ \sqrt{-1}(\xi' dx' + \tau' dt')) \in \mathring{T}^* N' ;\ \xi' = 0\}
\end{array}
\right.
$$

と定めて

$$(3.49)\begin{cases} \tau_k' = \tau_k. \\ t_k' = t_k \end{cases}$$

と定めると

$$\varphi : T^*_{\Sigma^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Sigma^{\mathbb{C}}} \longrightarrow T^*_{\Sigma'^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Sigma'^{\mathbb{C}}}$$

なる bicannonical transformation p^* の複素近傍で定まる。$(\varphi(p^*) = (0; \sqrt{-1}\,dt_{n_1}; \sqrt{-1}\,dz'_{2n-1}))$

これを量子化する時，

$$(3.50)\begin{cases} D_{w_j'} \longleftrightarrow D_{w_j} \\ w_j' \longleftrightarrow w_j \end{cases}$$

と選べば，

(3.51)

$$\varphi(\operatorname{supp} \mathcal{M}_{\Sigma^{\mathbb{C}}})$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (z', w'; \theta' dw', z'^* dz'); \; z_j'^* + \sqrt{-1}\, z_j' z'^*_{2n_0-1} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (j = 1, \cdots, p) \\ \qquad\qquad\qquad z_j'^* - \sqrt{-1}\, z_j' z'^*_{2n_0-1} = 0 \; (j = p+1, \cdots, n_0-1) \end{array} \right\}$$

と移り，更に

$\mathcal{M}_{\Sigma^c}$ は，変換後に低階項を消すと

(3.52)
$$
\mathcal{M}_0 : \begin{cases} \left(D_{z'_j} + \sqrt{-1}\, z'_j D_{z'_{2n_0-1}} \right) u = 0 & (j = 1, \cdots, p) \\ \left(D_{z'_j} - \sqrt{-1}\, z'_j D_{z'_{2n_0-1}} \right) u = 0 & (j = p+1, \cdots, n_0 - 1) \end{cases}
$$

に移る。よって次の同型を得る。

(3.53)
$$
\mathcal{E}xt^{k-1}(\mathcal{M}_+ ; \mathcal{C}^2_{\Sigma}) \Big|_{\Sigma_+, \rho^*} \simeq \varphi^{-1} \mathcal{E}xt^{k-1}(\mathcal{M}_0 ; \mathcal{C}^2_{\Sigma'}) \Big|_{W_0^+, \rho^*}
$$

但し W_0^+ は次に定める。

(3.54)
$$
\begin{aligned} V_0 &= \operatorname{supp}(\mathcal{M}_0) \cap \overset{\circ\,*}{\Sigma}{}', \widetilde{\Sigma}' \\ &= \left\{ \begin{aligned} &(x', t' ; \sqrt{-1}\,\tau' dt' ; \sqrt{-1}\, x'^* dx') ; \\ &x_1^* = \cdots = x_{n_0}^* = 0 \\ &x_1 = \cdots = x_{n_0} = 0 \end{aligned} \right\} \end{aligned}
$$

(3.55)
$$
W_0^+ = \left\{ \begin{aligned} &(x', t' ; \sqrt{-1}\,\tau' dt ; \sqrt{-1}\, x'^* dx') \in V_0 \\ &x'^*_{2n_0-1} > 0 \end{aligned} \right\}
$$

§3.1.の定理3.3.によるとき

$$(3.56)\quad \mathcal{E}xt^{k}_{\mathcal{E}^2_{\Sigma'/\mathbb{C}}}(\mathcal{M}_0,\ \mathcal{C}^2_{\Sigma'})\Big|_{\overline{W_0^+}} \simeq \mathcal{C}^2_{\Lambda_0}$$

であることが分る。但し

$$(3.57)\quad M_0 = \{(x', t) \in N';\ x'_1 = \cdots = x'_{n_0-1} = 0\}$$

$$(3.58)\quad \Lambda_0 = \left\{ \begin{array}{l} (x'_{n_0}, \cdots, x'_{2n_0-1}; t'; \sqrt{-1}(\xi'_{n_0} dx'_{n_0} + \cdots + \xi'_{2n_0-1} dx'_{2n_0-1} \\ \qquad\qquad + \tau' dt'); \\ \qquad \xi'_{n_0} = \cdots = \xi'_{2n_0-1} = 0 \end{array} \right\}$$

と定める。

従って $q^* \in \dot{T}^*_{\Lambda_0}\tilde{\Lambda}_0$ とみなして

$$(3.59)\quad \mathcal{H}^{p+1}_{\overline{\Lambda_+}}(\mathcal{C}\mathcal{O})\Big|_{\overline{\Sigma}^{p^*}} \simeq \mathcal{C}^2_{\Lambda_0, q^*}$$

なる同型定理を得る。

§3.4. 計算例.

(3.60) $\quad M := \mathbb{R}^{2n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t$

(3.61) $\quad \Lambda := \{(x,t;\sqrt{-1}(\xi dx+\tau dt) \in \sqrt{-1}T^*M;\ \xi = 0\}$

なる regular involutive submanifold をとる。

更に，Λ に沿った partially elliptic system として前節と同様に

(3.62)
$$\mathcal{M};\ \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_{n_0+1}}\right)u = 0 \\ \quad\vdots \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_{n_0}} + \sqrt{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_{2n_0}}\right)u = 0 \end{cases}$$

を考える。具体的には，

(3.63) $\quad N = \{(x,t) \in M;\ x_{n_0} - (x_1^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2) = 0\}$

へのmicrolocalな境界値問題を考える。同様に，

(3.64) $\quad \Lambda_\pm := \{(x,t;\sqrt{-1}\tau dt) \in \Lambda;\ \pm\{x_{n_0} - (x_1^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2)\} > 0\}$

(3.65) $\quad \Sigma := \Lambda \underset{M}{\times} N$

$\quad\quad = \{(x,t;\sqrt{-1}\tau dt) \in \Lambda;\ x_{n_0} - (x_1^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2) = 0\}$

とおく。具体的な計算の為

$(0,0) \in M$ の近傍で次のように変数変換をして考える。

$$(3.66)\quad \begin{cases} \tilde{x}_j = x_j & (j \neq n_0) \\ \tilde{x}_{n_0} = x_{n_0} - (x_1^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2) \end{cases}$$

この変換のもと方程式(3.62)は $D_j = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}$ として

$$(3.67)\quad \begin{cases} \left\{\left(D_j - x_j D_{n_0}\right) + \sqrt{-1}\, D_{n_0+j}\right\} u = 0. \quad (j = 1, \cdots, n_0 - 1). \\ \left(D_{n_0} + \sqrt{-1}\, D_{2n_0}\right) u = 0 \end{cases}$$

と変換されることに注意する。更に $(\tilde{x}, t)$ の dual variable を $(\tilde{\xi}, \tau)$ と定める。

$$(3.68)\quad X = \mathbb{C}^{2n_0}_{\tilde{z}} \times \mathbb{C}^{n_1}_{w} \simeq \mathbb{C}^{2n_0}_{z} \times \mathbb{C}^{n_1}_{w}$$

を M の複素化として、$\mathring{T}^*X$ 中の Λ の複素化として

$$(3.69)\quad \Lambda^{\mathbb{C}} = \{(\tilde{z}, w; \zeta dz + \theta dw) \in \mathring{T}^*X;\ \zeta = 0\}$$

として、$\tilde{\Lambda}$ を $\Lambda^{\mathbb{C}}$ での部分複素化とする。

$T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}$ の座標

$$(3.70)\quad T^*_\Lambda \tilde{\Lambda} \ni (\tilde{x}; t; \sqrt{-1}\, \tau dt;\ \sqrt{-1}\, \tilde{x}^* d\tilde{x})$$

同じく $T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ の座標を

$$(3.71)\quad T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}} \widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}} \ni (\tilde{z}, w; \theta dw; \tilde{z}^* d\tilde{z})$$

ととる。これに合わせて、

(3.73) $S^{*}_{\Sigma}\tilde{\Lambda} \ni (\tilde{x}'; t; \sqrt{-1}\tau dt; (\tilde{z}^{*}_{n_0} d\tilde{z}_{n_0} + \sqrt{-1}\,\tilde{x}'^{*} d\tilde{x}')\infty)$

とする。但し

$$\begin{cases} \tilde{x}' = (\tilde{x}_1 \cdots \overset{n_0}{\check{}} \cdots \tilde{x}_{2n_0}) \\ \tilde{x}'^{*} = (\tilde{x}^{*}_1 \cdots \overset{n_0}{\check{}} \cdots \tilde{x}^{*}_{2n_0}) \end{cases}$$

とする。

(3.74) $Z := \mathrm{supp}\left(\mathcal{E}^2_{\Sigma^{\mathbb{C}} \to \Lambda^{\mathbb{C}}} \underset{\mathcal{D}^2_{\Lambda^{\mathbb{C}}}}{\otimes} \mathcal{M}\Big|_{S^{*}_{\Sigma}\tilde{\Lambda}} \right)$

と定める時，

(3.75)
$$Z = \left\{ \begin{array}{l} (\tilde{x}'; t; \sqrt{-1}\tau dt; (\tilde{z}^{*}_{n_0} d\tilde{z}_{n_0} + \sqrt{-1}\,\tilde{x}'^{*} dx')\infty) \\ \quad \in S^{*}_{\Sigma}\tilde{\Lambda}; \\ \quad \mathrm{Im}\, \tilde{z}^{*}_{n_0} = 0 \ ; \ \mathrm{Re}\, \tilde{z}^{*}_{n_0} = \tilde{x}^{*}_{2n_0} \\ \tilde{x}^{*}_1 = \cdots = \tilde{x}^{*}_{n_0-1} = 0 \\ \tilde{x}^{*}_{n_0+1} = -2\tilde{x}_1 \tilde{x}^{*}_{2n_0} \ ; \ \cdots \ , \ \tilde{x}^{*}_{2n_0-1} = -2\tilde{x}_{n_0-1}\tilde{x}^{*}_{2n_0} \end{array} \right\}$$

であることが容易に分る。前節と同様に，

(3.76) $\beta : S'^{*}_{\Sigma}\tilde{\Lambda} \setminus S^{*}_{\tilde{\Sigma}}\tilde{\Lambda} \longrightarrow S^{*}_{\Sigma}\tilde{\Sigma}$

(3.77) $\alpha : S'^{*}_{\Sigma}\tilde{\Lambda} \setminus S^{*}_{\Lambda}\tilde{\Lambda} \longrightarrow S^{*}_{\Sigma}\tilde{\Lambda}$

と定めるとき，

$\rho|_Z$，$\sigma|_Z$ は座標を用いて次のように書ける。

(3.78)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (\tilde{x}';t;\sqrt{-1}\tau dt;\pm\{d\tilde{x}_{n_0}+\sqrt{-1}(-2\tilde{x}_1 d\tilde{x}_{n_0+1}-\cdots-2\tilde{x}_{n_0-1}d\tilde{x}_{2n_0-1}+d\tilde{x}_{2n_0}\}\infty) \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[dr, hook, "\rho"] & \\
(\tilde{x}',t;\sqrt{-1}\tau dt;\pm d\tilde{x}_{n_0}) & & p_\pm:=(\tilde{x}';t;\sqrt{-1}\tau dt;\pm\sqrt{-1}(-2\tilde{x}_1 d\tilde{x}_{n_0+1}-\cdots-2\tilde{x}_{n_0-1}d\tilde{x}_{2n_0-1}+d\tilde{x}_{2n_0})\infty)
\end{tikzcd}$$

と，同一視 $\sigma: Z \xrightarrow{\sim} S^*_\Sigma\Lambda$

埋め込み $\rho: Z \hookrightarrow S^*_\Sigma\tilde{\Sigma}$

が記述できる。よって，§3.3.の結果を用いると，

(3.79)

$$R\Gamma_{\bar{\Lambda}_\pm}(\mathcal{C}_\Theta)\Big|_{\tilde{\Sigma}}(\tilde{x}',t;\sqrt{-1}\tau)$$

$$\xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(\mathcal{N}_\pm;\mathcal{C}^2_\Sigma)_{p_\pm}[-1] \text{(複号同順)}$$

但し，$\mathcal{N}_\pm$ は

(3.80)
$$G_\pm = \{\pm \mathrm{Re}\, \tilde{z}^*_{n_0} > 0\} \subset S'^{*}_{\Sigma}\tilde{\Lambda}$$

と定めて．

(3.81) $$\mathcal{N}_\pm := \rho_*\Big(\mathcal{E}^2_{\Sigma^c\to\Lambda^c} \underset{\mathcal{D}^2_{\Lambda^c}}{\otimes} \mathcal{M}\Big|_{G_\pm}\Big)$$

と定めたものである。

ここで 次のような bicannonical transform を apply する。((3.79) の右辺に)

(3.82) $$S'^{*}_{\Sigma}\tilde{\Sigma} \xrightarrow{\ \varphi\ } S^{*}_{\Sigma}\tilde{\Sigma}$$

(3.83) $$\mathring{T}^{*}_{\Sigma^c}\tilde{\Sigma}^c \xrightarrow{\ \varphi^c\ } \mathring{T}^{*}_{\Sigma^c}\tilde{\Sigma}^c$$

(3.84) $$(\tilde{z}'; w, \theta dw; \tilde{z}'^{*} dz)$$
$$\xmapsto{\ \varphi^c\ } (y; w; \theta dw; y^* dy) \quad (y = (y_1, \cdots \overset{n_0}{\vee} \cdots y_{2n_0}))$$

として

$$\begin{cases} y_j = \tilde{z}_j + \frac{1}{2}\tilde{z}^*_{n_0+j}\,\tilde{z}^{*-1}_{2n_0} & (1 \le j \le n_0 - 1) \\ y_{n_0+j} = \tilde{z}_{n_0+j} + \frac{1}{2}\tilde{z}^*_j\,\tilde{z}^{*-1}_{2n_0} & (1 \le j \le n_0 - 1) \\ y_{2n_0} = \tilde{z}_{2n_0} - \frac{1}{2}\sum\limits_{1\le k\le n_0-1} \tilde{z}^{*-2}_{2n_0}\,\tilde{z}^*_{n_0+k}\,\tilde{z}^*_k \end{cases}$$

$\left| y_j^* = z_j^* \qquad (j=1,\cdots,n_0-1,\ n_0+1,\ \cdots,\ 2n_0).\right.$

と定める時.

(3.85)

$$\varphi(p_\pm) = \varphi(\tilde{x}';t;\sqrt{-1}\tau dt;\pm\sqrt{-1}(-2\tilde{x}_1 d\tilde{x}_{n_0+1}-\cdots\cdots -2\tilde{x}_{n_0-1}d\tilde{x}_{2n_0-1}+d\tilde{x}_{2n_0}))$$

$$= (0\cdots 0\, x_{n_0+1}\cdots x_{2n_0};\pm\sqrt{-1}(-2x_1 dx_{n_0+1}-\cdots -2\tilde{x}_{n_0-1}d\tilde{x}_{2n_0-1} + d\tilde{x}_{2n_0})\infty)$$

であることが分る。φ を量子化する。附随する、quantized bicannonical transform を Φ と記す時.

$\mathcal{M}_{\Sigma^c}$ は次の方程式系 $\mathcal{M}_0$ に変換される.

(3.89)

$$\mathcal{M}_0 : (D_j + \sqrt{-1}\, y_j D_{2n_0})u = 0 \quad (j=1,\cdots,n_0-1)$$

従って. (3.90)

$$\varphi^{-1}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}^2_{\Sigma^c}}(\mathcal{N}_\pm, \mathcal{C}^2_{\Sigma})_{p_\pm}.$$

$$\simeq \begin{cases} \mathcal{C}^2_{\Lambda_0,p_+}[n_0-1] \\ \mathcal{C}^2_{\Lambda_0,p_-} \end{cases}$$

であることが分る。但し

(3.91)

$$M_0 = \{ (y,t) \in N ;\ y_1 = \cdots y_{n_0-1} = 0 \}$$

(3.92)

$$\Lambda_0 = \left\{ \begin{array}{l} (y_{n_0+1}, \cdots, y_{2n_0}, t ; \sqrt{-1}(\tau dt + \eta_{n_0+1} dy_{n_0+1} \\ \qquad + \cdots + \eta_{2n_0} dy_{2n_0})\ ; \\ \eta_{n_0+1} = \cdots = \eta_{2n_0} = 0 \end{array} \right\}$$

と定める。

以上 (3.79) 及び (3.90) により

(3.93)

$$\mathcal{H}^1_{\Lambda_-}(\mathcal{C}\theta)\Big|_{\Sigma}(\tilde{x}', t ; \sqrt{-1}\tau dt)$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^2_{\Lambda_0, P_-}$$

であることが分る。

§3.5 層 $\mathcal{C}^{2-}_{S}$

(3.94) X：複素多様体（n_0 次元）

(3.95) $\Omega_+ := \{ x \in X ; s(x) > 0 \}$

を擬凸領域とする。

(3.96) $\tilde{\Lambda} = \sqrt{-1}\,\mathring{T}^* \mathbb{R}^{n_1} \times X$

(3.96) $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}$ を $x \in X$ を正則パラメーターとして持つ micro 函数の層とする。

(3.97) $S = \sqrt{-1}\,\mathring{T}^* \mathbb{R}^{n_1} \times \partial\Omega_+$

として、柏原－Schapira [12] の analogy による次の層 $\mathcal{C}^{2-}_{S}$ を定義する。

(3.98) $\left(T^*_S \tilde{\Lambda} \right)^- = \{ (p ; -a\,ds(z)) \in T^*_S \tilde{\Lambda} ; a > 0\ z \in \partial\Omega_+ \}$

として

[定義 3.5]

(3.99) $\mathcal{C}^{2-}_{S} := \mathcal{H}^1_{\mathring{T}^*_S \tilde{\Lambda}} \left(\pi^{-1}_{S|\tilde{\Lambda}}\, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}} \right)^a \Big|_{\left(T^*_S \tilde{\Lambda} \right)^-}$ ▨

[注意 3.6]　$p \in \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{n_1}$, $z \in \partial\Omega^+$ に対して.

$$(3.100)\quad \mathcal{C}^2_{\bar{S}^1,(p,-a\,ds(z))} = \mathcal{H}^1_{\mathring{T}^*_{S^1}\tilde{\Lambda}}(\pi_{S^1|\tilde{\Lambda}}\,\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})_{(p,\,a\,ds(z))}$$

$$= \mathcal{H}^1_{\tilde{\Lambda}\setminus(\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times\Omega_+)}(\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})\Big|_{\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times\partial\Omega_+}{}_{(p,z)}$$

$$= \left(j_*\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}} \,/\, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}\right)_{(p,z)}$$

但し　$j : \sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times\Omega_+ \hookrightarrow \sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times X.$

とする。

[例 3.7]　前節の計算例をまとめると次の同型が得られる。

$$(3.101)\quad \Lambda = \sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}_p \times \mathbb{R}^{n_0}_x \longleftrightarrow \sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_0+n_1}$$

これを $\sqrt{-1}\,\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_0+n}$ の regular involutive submanifold と見做す.

$$(3.102)\quad \tilde{\Lambda} = \sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_0}_z$$

$$(3.103)\quad \Lambda^{\mathbb{C}} = \mathring{T}^*\mathbb{C}^{n_1}_p \times \mathbb{C}^{n_0}_z .$$

ここで $T^*_\Lambda\tilde{\Lambda}$, $T^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\widetilde{\Lambda^{\mathbb{C}}}$ の座標をそれぞれ

$(p;x,\sqrt{-1}x^*dx)$, $(p;z,z^*dz)$ と記す.

(3.104) $\Omega_{+}^{0}=\{z\in\mathbb{C}^{n_0};\ x_{n_0}>x_1^2+\cdots+x_{n_0-1}^2\}$

とする。($z=x+iy$)

(3.105) $S_0=\sqrt{-1}\overset{\circ}{T}{}^*R^{n_1}\times\partial\Omega_{+}^{0}$

とするとき

次の bicannonical transformation を考える。

即ち,

$\overset{\circ}{T}{}^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}}\setminus\{z^*_{n_0}\neq 0\}\ni(p,z;z^*dz)$

(3.106) $\xrightarrow{\ \varphi\ }(p,\ iz+d_{z^*}\varphi(z^*),\ -iz^*)$

$\in\overset{\circ}{T}{}^*_{\Lambda^{\mathbb{C}}}\tilde{\Lambda}^{\mathbb{C}}\quad\left(\varphi(z^*)=-\dfrac{z_1^{*2}+\cdots+z_{n_0-1}^{*2}}{4z^*_{n_0}}\right)$

この φ により $\overset{\circ}{T}{}^*_{\Lambda}\tilde{\Lambda}$ と $\overset{\circ}{T}{}^*_{S_0}\tilde{\Lambda}$ は exchange される。

更に前節の結果により,次の命題を得る。

[命題3.8]

(3.107) $\varphi^{-1}\mathcal{C}^2_{\Lambda}\xrightarrow{\ \sim\ }\mathcal{C}^{2\,-}_{S_0}.$

▨

次に,正則パラメーター付き 2-micro 函数の層 $\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ を定義する。

$\tilde{\Lambda}$ を (3.102) のものとし,その sub-manifold Σ を次のように定義する。

(3.108) $\Sigma = \{(p, z) \in \tilde{\Lambda};\ \mathrm{Im}\, z_{d+1} = \cdots = \mathrm{Im}\, z_{n_0} = 0\}$

(但し $d < n_0$)

すると、正則パラメーター付き2-micro函数の層 $\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ を次のように定義出来る。

[定義 3.9]

(3.109) $\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}} = \mathcal{H}^{n_0-d}_{T^*_\Sigma \tilde{\Lambda}}\left(\pi^{-1}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}} \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}\right)^a$ ▨

[注意 3.10] 柏原-Yve・Laurent [7] にある、$\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}$ に対する"Edge of the wedge"により)

(3.110) $\mathcal{H}^{k}_{T^*_\Sigma \tilde{\Lambda}}\left(\pi^{-1}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}} \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}\right) = 0$

$(k < n_0 - d)$

が分る。野呂正行氏の修士論文 [8] によると、

$\Omega_0 \subset \sqrt{-1}\,\mathring{T}^* R^{n_1}$ (homogeneous な propre convex open set)

$\Omega_1 \subset \mathbb{C}^{n_0}$ (Stein open set).

に対して、$\Omega_0 \times \Omega_1$ は $\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}$ に関して cohomological に trivial であるので

(3.111) $\mathcal{H}^k_{T^*_\Sigma\tilde{\Lambda}}(\pi^{-1}_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) = 0$

$(k > n_0 - d)$,

であることは容易に分る。 ▨

前節 §3.4. と同様の direct calculation を経た後に次の同型を得る。

(3.112) $\Omega^1_+ := \{ z \in \mathbb{C}^{n_0};\ x_{n_0} > x_{d+1}^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2 \}$

(3.113) $S_1 = \sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^{n_1} \times \partial\Omega^1_+$

先程定義した bicanonical transformation (3.106) の φ によると

$\mathring{T}^*_\Sigma\tilde{\Lambda}$ と $\mathring{T}^*_{S_1}\tilde{\Lambda}$ は φ を通じて互いに移り変わる。更には,

[命題 3.11]

(3.114) $\varphi^{-1}\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{2\,-}_{S_1}$ ▨

この同型を用いて $\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ の結果をいくつか示す。

$T^*_{\Sigma}\tilde{\Lambda}$ の座標を $(p;\, z', x'';\, \sqrt{-1}x''^*dx'')$ とする。(但し, $z'=(z_1\cdots z_d)$ $x''=(x_{d+1}\cdots x_{n_0})$ $x''^*=(x^*_{d+1}\cdots x^*_{n_0})$ とする。) すると, $\mathscr{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ は, z'について接続の一意性を有することが分る。

これを述べる為に $\mathscr{C}_{\tilde{\Lambda}}$ に対する local Bochner の定理を用意する。

(3.115) $T := \sqrt{-1}\,\mathring{T}^*\mathbb{R}^n$

として,

X: 複素多様体に対して, X を正則パラメーターとして持つ micro 函数の層を $\mathscr{F}_X$ と記す。

(3.116) $$X \longmapsto \mathscr{F}_X.$$

と functorial に定まる。

($\mathscr{F}_X$ は $T\times X$ 上の sheaf であることに注意する。)

柏原-Laurent [7] にある Abstract な Edge of the wedge の定理の証明からいくつかの事実を抜き出す。

[定義3.12] $G\ (\subset X)$ locally closed set が q-proper であるとは, 任意の複素多様体 Y と T の任意の開集合 W に対して次が成立すること。

(3.117) $$\forall i<q \quad H^i_{G\times Y\times W}(X\times Y\times W;\, \mathscr{F}_{X\times Y}) = 0 \quad ▨$$

[Fact 3.13] (i) Z: Xの閉集合, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Xの開集合の増大列で $X=\bigcup_n U_n$ なるものとする。このとき,

$$\left[\begin{array}{l}\text{任意の } n \text{ に対して} \\ \quad Z\cap U_n \text{ が } q\text{-propre}\end{array}\right]$$

$\Longrightarrow$ Z は q-propre

(ii) $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$: Xの閉集合の減少列に対して,

任意の n に対して Z_n が q-propre

$\Longrightarrow$ $Z := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$ は q-propre ▨

[Fact 3.14] Y: compactな複素多様体, G: Xの閉集合, K: Yの閉集合で $K \neq Y$ とする。

この時, G が X 中 q-propre

$\Longrightarrow$ $G\times K$ は $(q+1)$ propre in $X\times Y$ ▨

[Fact 3.14の系]

$K_1, \cdots, K_n$: $\mathbb{C}$の compact set

X : 連結な複素多様体, $G(\subsetneq X)$: 閉集合

この時

$G\times K_1\times\cdots\times K_n$ は $X\times\mathbb{C}^n$ 中 $(n+1)$-propre

▨

[Fact 3.15] $Z\ (\subset X)$ 閉集合.

$$f: X \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\text{正則}).$$

$df \neq 0$ on X として $Y = f^{-1}(0)$ とおく。この時

Z が q-propre $\Longrightarrow$ $Z \cap Y$ は $(q-1)$ propre ▨

以上の準備のもと次の vanishing theorem を掲げる。成立するのは、柏原−Y. Laurent [7] の証明を読めば少しの modification で証明出来ることが分る。

[定理 3.16] K_1, K_2 : $\mathbb{C}^n$ の正則凸 compact set に対して

(3.118) $K_1 \setminus K_2$ は n-propre in $\mathbb{C}^n$ ▨

証明の為次の Lemma を用意する。

[Lemma 3.17] $K \subset$ 正則凸 compact set in $\mathbb{C}^n$, $\Omega\ (\subset \mathbb{C})$ open set, $Z \subsetneqq \Omega$ closed

$\Longrightarrow$ 1° K は n-propre in $\mathbb{C}^n$

2° $K \times Z$ は $(n+1)$-propre

(証明). 初めから $K \subset \{z \in \mathbb{C}^n ; |z_j| \leq 1\ (j=1,\cdots,n)\}$ と仮定してもよい。

$f_j(z) = z_j\ (j=1,\cdots,n)$ と定めて,

$$K = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{ z\in\mathbb{C}^n ;\ |f_k(z)| \le 1 \}$$

と表せる。(ここで $f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ $(k=1,2,\cdots)$)

$$K_N := \{ z\in\mathbb{C}^n ;\ |f_k(z)| \le 1 \quad (k=1,\cdots,N)\}$$

とおく。Fact 3.14の系により

$$T_N := \{ z\in\mathbb{C}^N ;\ |z_k| \le 1 \ (k=1,\cdots,N)\}\times Z$$

は $(N+1)$ propre in $\mathbb{C}^N \times \Omega$.

$$Y_N := \{ z\in\mathbb{C}^N ;\ z_j = f_j(z_1 \cdots z_n)\ (n+1 \le j \le N)\}$$

を定める時

$(Y_N \cap T_N)\times Z$ は $(n+1)$ propre in $Y_N \times \Omega$

$\pi : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^n$ により

$$\begin{tikzcd} Y^N \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{C}^n \\ T_N \cap Y_N \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\sim"] & K_N \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

上図より、$K_N \times Z$ は $(n+1)$ propre

Fact 3.13. により、$K \times Z$ は $(n+1)$ propre.

更に Fact 3.15. を用いると, K は n-propre である事が分る。 (Lemma 3.17 証了) ☒

[定理 3.16 の証明] Y を complex manifold として. $W \subset T$ open set とする。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & H^i_{K_1\cap K_2\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n\times Y}) \arrow[dl] & \\
H^i_{K_1\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n\times Y}) \arrow[rr] & & H^i_{(K_1\setminus K_2)\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}) \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}
$$

なる三角形と, Lemma 3.17 より分る

$$H^i_{K_1\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n\times Y})=0 \quad (i<n)$$

$$H^i_{(K_1\cap K_2)\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^n\times Y})=0 \quad (i<n).$$

より

$$H^i_{K_1\setminus K_2\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y})=0\quad(i<n-1)$$

が分る。あとは

$$H^n_{K_1\cap K_2\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y})$$

$$\longrightarrow H^n_{K_1\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y})$$

が injective であることを示せば証明が終わる。

初めから，$K_2\subset\{z;\ |z_j|\leq 1\ \ (j=1,\cdots,n)\}$

と仮定してよい。先程と同様に

$$f_j(z)=z_j\quad(j=1,\cdots,n)$$

とまずおいて．

$$K_2=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\{z\in\mathbb{C}^n;\ |f_k(z)|\leq 1\}$$

と表す。（$f_k(z)\in\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ とする。$(k=1,2,\cdots)$）.

$$K^N:=K_1\cap\bigcap_{1\leq k\leq N}\{z\in\mathbb{C}^n;\ |f_k(z)|\leq 1\}$$

と定める。

$$K_{N-1}\setminus K_N=\{z\in K_{N-1};1<|f(z)|\leq a_N\}$$

と表せる。（a_N を十分大に選ぶ。）

K_{N-1} は $\mathbb{C}^n$ 中正則凸であるので, Lemma 3.17 を用いると

$$K_{N-1}\times\{t\in\mathbb{C};\ 1<|t|\leqslant a_N\} \text{ は}$$

$(n+1)$ propre in $\mathbb{C}^n\times\{t\in\mathbb{C};\ |t|>1\}$

$$\{(z,t)\in\mathbb{C}^n\times\{|t|>1\};\ t=f_N(z)\}$$

と制限するべく Fact 3.15 を用いると,

$K_{N-1}\setminus K_N$ は n-propre である。従って

$$H^n_{K_N\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y}) \longrightarrow H^n_{K_{N-1}\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y})$$

は injective。故に

$$\varprojlim_N H^n_{K_N\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y}) \longrightarrow H^n_{K_1\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y})$$

は単射である。

$K_1\cap K_2=\bigcap_{N\geqslant n} K_N$ で K_N は n-propre であるので, Mittag-Leffler の論法により

$$\varprojlim_N H^n_{K_N\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y}) \simeq H^n_{K_1\cap K_2\times Y\times W}(\mathbb{C}^n\times Y\times W;\mathcal{F}_{\mathbb{C}^n\times Y})$$

が分るので 問題となっている単射性が得られた。
従って証明が終る。 ∎

この定理3.16.を用いると，次の正則パラメーター付き micro関数に対する "local Bochner" type theorem が成立するのは，相原−河合−木村[5]と同様。

[命題3.18] $0<\varepsilon<1$ に対して

$$G_\varepsilon := \left\{ (x_1+\sqrt{-1}\,y_1,\ x_2+\sqrt{-1}\,y_2)\in\mathbb{C}^2;\ 0\le y_1,\ 0\le y_2,\ y_1+y_2<1,\ \varepsilon(x_1^2+x_2^2)+(y_1+y_2)-\varepsilon(y_1^2+y_2^2)<1-\varepsilon \right\}$$

$$F_\varepsilon = G_\varepsilon\cap\{y_1=0 \text{ or } y_2=0\}$$

によって G_ε, $F_\varepsilon\subset\mathbb{C}^2$ を定義する。U' を F_ε を含む開集合とする。更に，

$$U=\left\{(x_1+\sqrt{-1}\,y_1,\ x_2+\sqrt{-1}\,y_2)\in U';\ y_1<0 \text{ or } y_2<0\right\}$$

と定める。この時，$\forall\, W_0\subset\mathbb{C}^n$ open set

$\forall W_1 \subset T$ に対して、

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^2\times W_0}\left((V^{\sqcup} G_\varepsilon)\times W_0\times W_1\right) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^2\times W_0}(V\times W)$$

は全射である。 $\blacksquare$

[命題3.19] $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ とする。

ここで、

$$F_1 := \left\{ (x_1+\sqrt{-1}\,y_1,\ x_2+\sqrt{-1}\,y_2)\in\mathbb{C}^2 ;\ y_1=0,\ 0\leq y_2<1,\ x_1^2+x_2^2 < 4\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \right\}$$

$$F_2 := \left\{ (x_1+\sqrt{-1}\,y_1,\ x_2+\sqrt{-1}\,y_2)\in\mathbb{C}^2 ;\ y_2=0,\ 0\leq y_1<1,\ x_1^2+x_2^2 < 4\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) \right\}$$

$$G_1 = \left\{ (x_1+\sqrt{-1}\,y_1,\ x_2+\sqrt{-1}\,y_2)\in\mathbb{C}^2 ;\ y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ y_2+(1-2\varepsilon)(y_1-1)<0,\ x_1^2+x_2^2<\frac{1}{\varepsilon}-1 \right\}$$

$$G_2 = \left\{ (x_1+\sqrt{-1}\,y_1,\ x_2+\sqrt{-1}\,y_2)\in\mathbb{C}^2 ;\ y_1\geq 0,\ y_2\geq 0,\ y_1+(1-2\varepsilon)(y_2-1)<0,\ x_1^2+x_2^2<\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\}$$

により、F_1, F_2, G_1, G_{12} を定める。

$F = F_1 \cup F_2$, $G = G_1 \cup G_2$ とおく, U' を F の近傍として

$$U = U' \cap \{ y_1 < 0 \text{ または } y_2 < 0 \}$$

と定める。任意の開集合 $W_0 \subset \mathbb{C}^n$, $W_1 \subset T$ に対して

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^2 \times W_0}((U \cup G) \times W_0 \times W_1)$$

$$\longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}^2 \times W_0}(U \times W_0 \times W_1)$$

は全射的である。 ▨

さて, (3.108) の状況に戻り, 正則パラメーター付 micro 函数の層 $\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ の正則パラメーターに関する接続の一意性を示そう。

(3.119) $M = \mathbb{R}^{n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}$

(3.120) $\Lambda = \{ (x, t; \sqrt{-1}(\xi dx + \tau dt)) \in \sqrt{-1}T^*M ; \xi = 0 \}$

(3.121) $\tilde{\Lambda} = (\Lambda \text{ の部分複素化})$

$$\simeq \mathbb{C}^{n_0}_z \times \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{n_1}_{p=(t;\sqrt{-1}\tau dt)}$$

$d < n$ として

(3.122) $\Sigma = \{ (z, p) \in \tilde{\Lambda} ; \operatorname{Im} z_{d+1} = \cdots = \operatorname{Im} z_{n_0} = 0 \}$

証明の便宜の為に少しNotationを準備する。

(3.123) $\hat{M} = M \times \mathbb{R}_s.$

(3.124) $$\hat{\Lambda} = \left\{ (x,t,s;\sqrt{-1}(\xi dx+\tau dt+\sigma ds)) \in \sqrt{-1}T^*\hat{M};\ \xi=0,\ \sigma=0 \right\}$$

(3.125) $$\tilde{\hat{\Lambda}} \simeq \mathbb{C}^{n_0+1}_{(z,v)} \times \sqrt{-1}\,\dot{T}^*\mathbb{R}^{n_1}_{p}$$

と考えて

(3.126) $$\hat{\Sigma} = \left\{ (z,v;p);\ \mathrm{Im}\,z_{d+1}=\cdots=\mathrm{Im}\,z_{n_0} = \mathrm{Im}\,v = 0 \right\}$$

と表す。$T^*_{\Sigma}\tilde{\Lambda}$, $T^*_{\hat{\Sigma}}\tilde{\hat{\Lambda}}$ の座標をそれぞれ,

$(p;z',x'';\sqrt{-1}x''^*dx'')$, $(p;z',x'',s;\sqrt{-1}(x''^*dx''+s^*ds))$

と記すことにする。

[定理3.20] u を $\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ の section とする。
($V \subset T^*_{\Sigma}\tilde{\Lambda}$ 上の section とする。)すると, supp u
は $\{p=\text{const},\ x''=\text{const};\ x''^*=\text{const}\}$

なる形の連結成分の union である。

(証明) 1°
$V \cap \{T^*_{\Sigma}\tilde{\Lambda}$ の 0-section$\} = \phi$ の場合
に reduce されるのは,

$$u \otimes \delta(t) \in \Gamma(\tilde{\mathcal{U}};\ \mathcal{C}^2_{\hat{\Sigma}|\tilde{\Lambda}})$$

但し

$$\hat{\mathcal{U}} = \left\{ \begin{array}{l} (p;\ z', x'', s;\ \sqrt{-1}(x''^* dx'' + s^* ds));\ s^* \neq 0 \\ \qquad (p, z';\ x'';\ \sqrt{-1}(x''^*/s^*)dx) \in \mathcal{U} \end{array} \right\}$$

であり,

$$(p;\ z', x'', 0;\ \sqrt{-1}(x''^* dx'' + ds)) \in \mathrm{supp}(u \otimes \delta(s))$$

$$\Longleftrightarrow\ (p;\ z', x'';\ \sqrt{-1}x''^* dx'') \in \mathrm{supp}\, u$$

に注意する時, $\mathcal{U} \cap \{T^*_\Sigma \tilde{\Lambda}$ の 0-section$\} = \phi$ の場合に帰着されることが分る。

2° $\mathcal{U} \cap \{T^*_\Sigma \tilde{\Lambda}$ の 0-section $\} = \phi$ の場合は, 命題3.11の同型 (3.114) と命題3.19を用いると容易に分る。

(cf. Schapira [10] の定理2.1の証明)

▨

次節の為に次の prop. を証明しておく。

[命題3.21] cannonical な morphism

$$\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}\Big|_{T^*_\Sigma \tilde{\Lambda} \cap T^*_\Lambda \tilde{\Lambda}} \longrightarrow \mathcal{C}^2_\Lambda \tag{3.127}$$

があり, injective である。

(証明)

正則パラメーターの次元が $d=1$ の場合に reduce される。

$T^*_\Sigma \tilde{\Lambda}$ の coordinate を $(p; z_1, x', \sqrt{-1}\, x'^* dx')$
(但し $x' = (x_2, \cdots, x_{n_0})$ と記す。)
と表す時, (i) $x'^* \neq 0$ の時 及び (ii) $x'^* = 0$ の時の二つに分かれる。

(i) $x'^* \neq 0$ の時.

$\mathring{q} = (0, \sqrt{-1}\, dt_1; 0; \sqrt{-1}\, dx_2)$ $\quad (\mathring{p} = (0; \sqrt{-1}\, dt_1))$
において証明する。

$$\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}, \mathring{q}} = \varinjlim_{\Omega, \omega, \Gamma} H^{n_0-1}_{\omega \times (\Omega \cap (\mathbb{C}_{z_1} \times \mathbb{R}^{n_0-1} + i\Gamma))}(\omega \times \Omega; \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})$$

但し,

(3.128) Γ は $\mathbb{R}^{n_0-1}$ の closed convex cone で Γ° in S^{n_0-2} が $\sqrt{-1}\, dx_2$ の基本近傍となるべく選ぶ

(3.129) ω は $\sqrt{-1}\, S^*\mathbb{R}^{n_1}$ 中の $\mathring{p}$ の基本近傍
Ω は $0 \in \mathbb{C}^{n_0}$ 中の 0 の基本近傍

を動く。

更に

(3.130) $\mathcal{C}^2_{\tilde{\Lambda},j} = \varinjlim_{\omega,\Omega,G} H^{n_0}_{\omega\times(\Omega\cap\mathbb{R}^{n_0}+iG)}(\omega\times\Omega;\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}})$

但し

(3.131) G は $\mathbb{R}^{n_0}$ の closed convex cone で

G° in S^{n_0-1} が $\sqrt{-1}dx_2$ の 基本近傍系

となるように動く。

$\delta = \mathbb{R}\times\{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n_0-1}$ と見做して

更に

$\delta^\pm = \overline{\mathbb{R}_\pm}\times\{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n_0-1}$ を定める。

$$G+\delta = (G+\delta^+)\cup(G+\delta^-)$$

$$G = (G+\delta^+)\cap(G+\delta^-)$$

に注意して、次の support に関する triangle を得る。

(3.132)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}\Gamma_{\omega\times(\Omega\cap(\mathbb{R}^{n_0}+iG))}(\omega\times\Omega;\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) \arrow[dl] & \\
\bigoplus_{\pm}\mathbb{R}\Gamma_{\omega\times(\Omega\cap(\mathbb{R}^{n_0}+i(G+\delta^\pm)))}(\omega\times\Omega;\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) \arrow[rr] & & \mathbb{R}\Gamma_{\omega\times\Omega\cap(\mathbb{R}^{n_0}+i(G+\delta))}(\omega\times\Omega;\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) \arrow[ul, "+1"']
\end{tikzcd}$$

柏原−Laurent[9]のEdge of the wedge

により、(3.133)

$$\varinjlim_{\omega,\,\Omega} H^{n_0-1}_{\omega\times(\Omega\cap(\mathbb{R}^{n_0}+i(G+\delta^{\pm})))}(\omega\times\Omega\,;\mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}) = 0.$$

が分るので、(3.132)と併せて.(3.127)を

得る。

(ii) $x^*=0$ の時

これも(i)の場合と同様に証明される。 ▨

§6. すいか割りの定理.

この§6においては, 柏原−Yve. Laurent [7] において証明されている, Microlocal な Holmgren の定理を所謂 "Watermelon Cut" type theorem に拡張する.(柏原−Yve Laurent の証明は cohomological なものであったが, 最近野呂正行氏がその修論[8]において $\mathcal{B}^2_{\Lambda}$ の平面波分解を用いた証明を見出したことを注記しておく。)

まず第2章の§2.2.で考察した層 $\mathcal{C}^2_{\Sigma_1|\tilde{\Lambda}}$ について, 接続の一意性を調べる。その為に, $\mathcal{C}^2_{\Sigma_1|\tilde{\Lambda}}$ を cosphere bundle でなく, cotangent bundle まで込めて定義し直す.

(3.133) $\Lambda = \{(x,t;\sqrt{-1}(\xi dx+\tau dt)) \in T^*_M X;\ \xi = 0\}$

但し $X = \mathbb{C}^{n_0}_z \times \mathbb{C}^{n_1}_w$, $M = \mathbb{R}^{n_0}_x \times \mathbb{R}^{n_1}_t$.

とする。

$\tilde{\Lambda}$ を Λ の部分複素化とする時, 次の Σ_0, Σ_1 を定める。但し

(3.134) $\tilde{\Lambda} \simeq \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^{n_1}_p \times \mathbb{C}^{n_0}_z$

と同一視する。

(3.135) $\Sigma_0 = \{(p;z) \in \tilde{\Lambda};\ z_1 = 0,\ \mathrm{Im}\, z_2 = \cdots = \mathrm{Im}\, z_{n_0} = 0\}$

(3.136) $\Sigma_1 = \{(p,z) \in \tilde{\Lambda};\ \mathrm{Im}\, z_2 = \cdots\cdots = \mathrm{Im}\, z_{n_0} = 0\}$

[定義 3.22]

$$\mathcal{C}^2_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}} = \mathcal{H}^{n_0}_{T^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}}\left(\pi^{-1}_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}}\, \mathcal{C}_{\tilde{\Lambda}}\right)^a$$

但し $\widetilde{\Sigma_0 \tilde{\Lambda}}^* = T^*_{\Sigma}\tilde{\Lambda} \cup (\tilde{\Lambda} \setminus \Sigma) \xrightarrow{\pi_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}}} \tilde{\Lambda}$.

を comonoidal 変換とする。

前節で定義した $\mathcal{C}^2_{\Sigma_1|\tilde{\Lambda}}$ と $\mathcal{C}^2_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}}$ は

second-microlocal な Legendre 変換により

互いに同型に移り合う。これを用いて次の

命題 3.23 を得る。

[命題 3.23]

(3.137) $$\mathcal{C}^2_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}}\Big|_{\mathring{T}^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda} \cap \mathring{T}^*_{\Lambda}\tilde{\Lambda}} \longrightarrow \mathcal{C}^2_{\tilde{\Lambda}}$$

なる injective な morphism がある。 ▨

[命題3.24] $T^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}$ の座標系を $(p; x'; z_1^* dz_1 + \sqrt{-1}x'^* dx')$ とする。(但し、$x' = (x_2 \cdots x_{n_0})$ と記す。)

すると $\mathscr{C}^2_{\Sigma_0}|\tilde{\Lambda}$ は z_1^* について一意接続性を持つ。

(証明) 定理3.20.の証明と同様に柏原先生による dummy の technique を用いて $x'^* \neq 0$ の場合に帰着される。

$x'^* \neq 0$ の時は、定理3.20より Legendre 変換を経て、直ちに証明される。 ▨

[定理3.25] (microlocal version of Water-Melon Cut) $\mathring{q} = (\mathring{p}; x=0)$ とする。

$u \in \mathscr{B}^2_{\Lambda,\mathring{q}}$ が次の条件を満たすとする。

(3.138) $\mathrm{supp}\, u \subset \{(p,x) \in \Lambda;\ x_1 \geq 0\}$

この時 $(\mathring{p}; 0; \sqrt{-1}\mathring{x}_1^*, \sqrt{-1}\mathring{x}'^*) \in SS^2_\Lambda(u)$.

$\Longrightarrow (\mathring{p}, 0; \sqrt{-1}x_1^*; \sqrt{-1}\mathring{x}'^*) \in SS^2_\Lambda(u)$.
$(\forall x_1^* \in \mathbb{R})$

（証明）

定理3.20のテクニックと同様に $x'^* \neq 0$ の時に帰着される。

$x'^* \neq 0$ を仮定する。

$u \in \mathcal{B}^2_\Lambda, q$ が $\omega \subset \Lambda$ で定義されているとする。q を Λ の変数として表す。

$$
\begin{tikzcd}
\Gamma_{\overline{\Lambda_+}}(\omega; \mathcal{B}^2_\Lambda) \arrow[r, "sp^2_\Lambda"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Gamma(\mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda} \cap \pi^{-1}_\Lambda(\omega); \mathcal{C}^2_\Lambda) \arrow[d] \\
\Gamma(G_+; \mathcal{C}^2_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}}) \arrow[r] & H^1_{\mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda} \cap \mathring{T}^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}}(\mathring{T}^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda} \cap \pi^{-1}_\Lambda(\omega); \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}})
\end{tikzcd}
\tag{3.139}
$$

但し

$$G_+ = \{(q, z_1^* dz_1 + \sqrt{-1}x'^* dx'); \ \mathrm{Re}\, z_1^* > 0\} \tag{3.140}$$

として上の可換図式が存在する。

（Schapira [10] 参照のこと。）ここで、第2行と第2列が単射であることを示す。（後で。）

$(\mathring{p};0;\sqrt{-1}\mathring{x}_1^*,\sqrt{-1}\mathring{x}'^*) \notin SS^2_\Lambda(u)$ と

仮定する。第2行の injectivity より

$u=0$ near $(\mathring{p};0;\sqrt{-1}\mathring{x}_1^*,\sqrt{-1}\mathring{x}'^*)$

$\mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}$ の z_1^*に関する接続の一意性より

$(\mathring{p},0;z_1^*;\sqrt{-1}\mathring{x}'^*) \in G_+$ なる所で $u=0$

であることが分る。

(第2列の injectivity より直ちに.

$(\mathring{p};0;\sqrt{-1}x_1^*;\sqrt{-1}\mathring{x}'^*) \notin SS^2_\Lambda(u)$ が分り

証明をする。

<u>第三行の injectivity について.</u>

$T^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}$ の coodinate を $(p;x',z_1^*;\sqrt{-1}x'^*)$ と

とる。$\mathring{q}=(\mathring{p};0;0;\sqrt{-1}\mathring{x}')$ ととる。

Ω を $\mathring{q}$ の $T^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}$ での近傍として.

$$\mathcal{H}^1_{\dot{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda}\cap\dot{T}^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}}(\mathcal{C}^2_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}})_{\mathring{q}}.$$

$$= \varinjlim_{\Omega} \left(\bigoplus_{\pm} \Gamma(\Omega \cap \{\pm \mathrm{Re}\, z_1^* > 0\}; \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}) \Big/ \Gamma(\Omega; \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}) \right)$$

より

$$\Gamma(G_+; \mathcal{C}^2_{\Sigma|\tilde{\Lambda}}) \longrightarrow \mathcal{H}^1_{T^*_{\Lambda}\tilde{\Lambda} \cap T^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}}(\mathcal{C}^2_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}})_{\mathring{p}}$$

は容易に定まり injective であることが分る。

<u>第2列の injectivity について。</u>

我々は $\mathcal{C}^2_{S_0}$, $\mathcal{C}^2_{S_1}$ の言葉で翻訳する。

$$Z_0 = \{ z = x+iy \in \mathbb{C}^{n_0} ; x_{n_0} < x_1^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2 \}$$

$$Z_1 = \{ z = x+iy \in \mathbb{C}^{n_0} ; x_{n_0} < x_2^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2 \}$$

更に

$$Z_2^+ = \{ z ; x_1 \leqq 0 \text{ かつ } x_{n_0} < x_2^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2 \}$$
$$\cup \{ z ; x_1 \geqq 0 \text{ かつ } x_{n_0} < x_1^2 + \cdots + x_{n_0-1}^2 \}$$

Z_2^- も同様に定める。

今までの議論と同様に
$S_j^{(\pm)} = \partial \; Z_j^{(\pm)}$ と定めて.

$$\mathcal{C}^2_{S_j^\pm} = \mathcal{H}^1_{\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times Z_j^{(\pm)}}(\mathcal{C}\mathcal{O})\Big|_{\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times S_j^{(\pm)}}$$

と定める。この時次の exact sequence が存在する。

$$0 \to \mathcal{C}^2_{S_1}\Big|_{\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times(S_1\cap S_0)} \longrightarrow \bigoplus_{\pm}\mathcal{C}^2_{S_2^{(\pm)}}\Big|_{\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times(S_1\cap S_0)}$$

$$\longrightarrow \mathcal{C}^2_{S_0}\Big|_{\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times(S_1\cap S_0)} \longrightarrow 0$$

更に次の exact sequence が存在する。
Ω を $q \in \sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times(S_1\cap S_0)$ の基本近傍 in
$\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_1}\times S_0$ として.

$$0 \to \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega; \mathcal{C}^2_{S_0}) \longrightarrow \bigoplus_{\pm} \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega\cap\{\pm x_1>0\}, \mathcal{C}^2_{S_0})$$

$$\longrightarrow \mathcal{H}^1_{(S_1\cap S_0)\times\sqrt{-1}\mathring{T}^*\mathbb{R}^{n_0}}(\mathcal{C}^2_{S_0})_q \longrightarrow 0.$$

ここで

$$\mathcal{C}^2_{S_2^{(\pm)},q} \xrightarrow{b_\pm} \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega\cap\{\pm x_1>0\}, \mathcal{C}^2_{S_0})$$

なる morphism が定まり

$$b_\pm(\mathcal{C}^2_{S_1,q}) \subset \varinjlim_{\Omega} \Gamma(\Omega; \mathcal{C}^2_{S_0})$$

は容易に分る。従って，

$$\bigoplus_{\pm} \mathcal{C}^2_{S_2^{(\pm)},q} \Big/ \mathcal{C}^2_{S_1,q} \longrightarrow \varinjlim_{\Omega} \bigoplus_{\pm} \Gamma(\Omega\cap\{\pm x_1>0\}, \mathcal{C}^2_{S_0}) \Big/ \Gamma(\Omega; \mathcal{C}^2_{S_0})$$

が定まるが これが injective であるのは易しい。

これより

$$\mathcal{C}^2_{S_1,q} \longrightarrow \mathcal{H}^1_{\sqrt{-1}\mathring{T}^*R^{n_1}\times S_1\cap S_0}(\mathcal{C}^2_{S_0})_{,q}$$

が injective であることが分った。

~~言羽羽~~ 翻訳すると

$$\mathcal{C}^2_\Lambda\Big| \longrightarrow \mathcal{H}^1_{\mathring{T}^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}\cap\mathring{T}^*_\Lambda\tilde{\Lambda}}(\mathcal{C}^2_{\Sigma_0|\tilde{\Lambda}})$$

$$\mathring{T}^*_{\Sigma_0}\tilde{\Lambda}\cap\mathring{T}^*\tilde{\Lambda}$$

が injective と分る。 ▨

[文献]

[1] Bony-Schapira, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles., Ann. Inst. Fourier, Grenoble 26, 1 (1976) 81-140.

[2] 柏原-河合 : On the Boundary Value Problem for elliptic system of Linear Differential Equations I . Proc. Japan. Acad, 48 (1972) 712 ~ 715.

[3] 柏原-河合. Some applications of Boundary value problems for elliptic systems of Linear Differential Equations: Annals of Mathematics studies 93 ; "Seminar on Micro Local Analysis"

[4] 柏原-河合 : Theory of elliptic boundary value problems and its applications. 数理研講究録. 238 , pp 1 ~ 59.

[5] 柏原-河合-木村 ; 代数解析学の基礎 紀伊国屋書店

[6] Yve Laurent : Théorie de la Deuxième Microlocalisation dans le Domaine Complexe : Thesis presented to Univ. Paris Sud, Centre d'Orsay. (Birkhäuser, Progress in Mathematics vol 53. として出版).

[7] 柏原 − Yve Laurent : Theoremes D'annulation et deuxieme Microlocalisation. Prepublication d'Orsay.

[8] 野呂正行, 修士論文 (東京大学に 1985年 1月に提出)

[9] ([SKK]) 佐藤・柏原・河合; Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Springer Lecture Note in Math vol 287.

[10] Schapira ; Propagation at the Boundary of analytic Singularities ; "Singularities in Boundary Value Problems" 185〜212

[11] 戸瀬信之 : 才2修士論文

[12] 柏原 − Schapira, Micro hyperbolic systems. Acta Math 142 (1979) 1〜55